# LIVRET DE MATHEMATIQUES

## De la seconde vers la première


Ce livret a été conçu pour vous, élèves de $2^{\text{nde}}$ qui allez intégrer la classe de première avec la spécialité maths ou pas à la rentrée de Septembre.

Il s'agit de fiches reprenant une partie des notions étudiées en $2^{\text{nde}}$, à traiter avec sérieux pour aborder l'année de première en mathématiques dans les meilleures conditions.

C'est aussi un outil à conserver et consulter régulièrement car vous y trouverez les acquis indispensables pour assimiler le programme de $1^{\text{ère}}$.

**<u>Quelques conseils d'organisation</u>** :

- Echelonner votre travail sur plusieurs semaines : Ne pas commencer la veille de la rentrée.
- S'assurer que l'on maîtrise le rappel du cours avant de faire les exercices en s'interrogeant au brouillon sur ce que l'on sait concernant le sujet abordé.
- Faire attention au soin et à la rédaction : Travaillez avec rigueur.
- Si vous ne réussissez pas à faire un exercice, n'abandonnez pas et allez rouvrir vos cahiers ou classeurs de $2^{\text{nde}}$ pour y retrouver un exercice du même type.

C'est en bloquant, en se trompant, en se rendant compte de ses erreurs et en les corrigeant que l'on progresse en mathématiques. En effet, buter sur un problème est la meilleure façon de voir ce qu'il vous a manqué pour arriver au résultat. Contempler la solution d'un exercice qu'on n'a pas cherché ne fait pas progresser.

# ENSEMBLES DE NOMBRES ET INTERVALLES

▶ $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; \cdots\}$ : ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z} = \{\cdots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \cdots\}$ : ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}$ : ensemble des nombres décimaux.
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$ : ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ : ensemble des nombres réels.
On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Certains nombres réels ne sont pas rationnels. On dit que ces nombres sont irrationnels.

Exemple 1. $-5$ est un entier relatif, un nombre décimal, un nombre rationnel et un réel.
$\frac{1}{3}$ est un nombre rationnel et un nombre réel.
Exemple 2. $\pi$, $\sqrt{2}$ et $\sin(60°)$ sont des nombres irrationnels.

▶ Soient $a$ et $b$ deux nombres réels.
$x \in [a ; b] \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$ ; $x \in ]a ; b[ \Leftrightarrow a < x < b$.
$x \in [a , +\infty[ \Leftrightarrow x \geqslant a$ ; $x \in ]-\infty ; a] \Leftrightarrow x \leqslant a$.
On définit de même $[a ; b[$, $]a ; b]$, $]-\infty ; a[$ et $]a , +\infty[$.

Exemples. $x \in [-2 ; 6] \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 6$
$x \in ]-\infty ; -2[ \Leftrightarrow x < -2$
$x \in [-8 ; -3[ \Leftrightarrow -8 \leqslant x < -3$

▶ Soient I et J deux intervalles.
- L'intersection de I et J, notée $I \cap J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à I et à J.
- La réunion de I et J, notée $I \cup J$, est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J.

Exemple. $I = [3 ; 8[$ et $J = ]-\infty ; 4[$.
On a : $I \cup J = ]-\infty ; 8[$ et $I \cap J = [3 ; 4[$.

▶ La valeur absolue, d'un nombre réel $x$, notée $|x|$, est la distance entre $x$ et $0$.
La distance entre deux réels $a$ et $b$ est le nombre $|a-b|$.
Si $x \geqslant 0$, alors $|x| = x$. Si $x \leqslant 0$, alors $|x| = -x$.

Exemple. $|-2| = 2$
La distance entre $-3$ et $\pi$ est
$|(-3)-\pi| = -(-3-\pi) = \pi + 3$ puisque $-3-\pi < 0$.

**Exercice 1 :** Déterminer la nature des nombres suivants : $\sqrt{5}$ ; $\frac{5}{4}$ ; $-\frac{50}{10}$ ; $et$ $\sqrt{9}$

**Exercice 2 :** Exprimer les nombres suivants sans la notation valeur absolue :

1. $|-\frac{3}{5}|$  2. $|\sqrt{2}-3|$  3. $|5-\frac{3}{2}|$

**Exercice 3 :** Déterminer la réunion et l'intersection des intervalles I et J suivants :

1. $I = [-4 ; 7[ \; et \; J = [1 ; +\infty[$
2. $I = ]-\infty ; 2[ \; et \; J = [2 ; +\infty[$

**Exercice 4 :** Exprimer la distance entre les réels $5 \; et \; \frac{13}{2}$ sans la notation valeur absolue

# INFORMATIONS CHIFFRÉES

- Une évolution de $t$ % correspond au coefficient multiplicateur $\mathrm{CM} = 1 + \frac{t}{100}$ qui permet de passer de la valeur de départ $\mathrm{V_D} \neq 0$ à la valeur d'arrivée $\mathrm{V_A}$ : $\mathrm{V_A} = \left(1 + \frac{t}{100}\right)\mathrm{V_D}$. Ainsi : $t = \frac{\mathrm{V_A} - \mathrm{V_D}}{\mathrm{V_D}} \times 100$.

Exemple. Une chemise coûtant 40 € subit une baisse de 15 %. Elle coûte maintenant $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times 40 = 0{,}85 \times 40 = 34$ €.

- Le coefficient multiplicateur global CM de deux évolutions successives $t_1$ et $t_2$ de coefficients multiplicateurs respectifs $\mathrm{CM_1}$ et $\mathrm{CM_2}$ est : $\mathrm{CM} = \mathrm{CM_1} \times \mathrm{CM_2}$.

Exemple. Cette même chemise subit ensuite une hausse de 20 %. Le coefficient multiplicateur global est : $0{,}85\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0{,}85 \times 1{,}2 = 1{,}02 = 1 + 0{,}02$, soit une hausse globale de 2 %.

**Exercice 1 :** Un salaire de 1 500€ a augmenté de 20% puis a baissé de 5%

1. Quelle est l'évolution globale ?
2. Quel est le montant du salaire final ?

**Exercice 2 :** Les effectifs d'un lycée sont passés de 900 à 990 élèves.

1. Quelle évolution ont-ils subie ?
2. Quelle évolution permettrait ensuite de résorber cette hausse ? (exprimer la réponse en % arrondi au dixième)

# CALCULS NUMERIQUE ET LITTERAL

- Pour tous les nombres réels $a$ et $b$ :
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ;
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ;
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Exemples. $(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$
$(2y-7)^2 = 4y^2 - 28y + 49$
$(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

- Pour tout nombre réel positif $a$, on a : $(\sqrt{a})^2 = a$.
Pour tout nombre réel $a$, on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.
Pour tous réels $a$ et $b$ positifs :
• $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ;
• si $b \neq 0$ : $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ;
• $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Exemples. $(\sqrt{3})^2 = 3$ et $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.
Si $x$ est un réel strictement positif alors :
$\sqrt{4x} = \sqrt{4} \times \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$ et $\sqrt{4+x} \leqslant 2 + \sqrt{x}$.

**Exercice 1 :** Développer les expressions algébriques suivantes où $x \in \mathbb{R}$ :

1. $(3x-7)^2$  2. $(x - \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3})$  3. $(x + \sqrt{2})^2$

**Exercice 2 :** Simplifier les nombres suivants : $\sqrt{\frac{5}{49}}$ et $\sqrt{5x^2}$ $où\ x\ est\ un\ réel$

**Exercice 3 :** Factoriser, à l'aide d'identités remarquables, les expressions algébriques suivantes définies sur $\mathbb{R}$

1. $x^2 + 14x + 49$  2. $9x^2 - 30x + 25$  3. $t^2 - \frac{16}{81}$

# RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS, INÉQUATIONS, SYSTÈMES

- Il existe deux méthodes pour résoudre des systèmes :
la méthode par combinaisons linéaires et la méthode par substitution.

Exemple. Le système $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$ a pour solution le couple $(-1\,;2)$.

**Exercice 1 :** En utilisant la méthode par combinaison linéaire, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ -2x + 6y = -3 \end{cases}$$

**Exercice 2 :** En utilisant la méthode par substitution, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3y - x = 2 \\ 4x - 5y = 4 \end{cases}$$

**Exercice 3 :** $(\boldsymbol{d})$ $\boldsymbol{et}$ $(\boldsymbol{d'})$ sont deux droites d'équations respectives $2x - 4y = 0$ $et$ $7y - 4x = -5$.
Déterminer le point d'intersection de $(d)$ $et$ $(d')$

# FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS ET VARIATIONS

▸ Une fonction $f$ définie sur $\mathcal{D}$ associe, à chaque réel $x \in \mathcal{D}$, un unique réel $y$, noté $f(x)$.
Il y a trois principaux modes de définition d'une fonction $f$ :
- son expression $f(x)$ en fonction de $x$ ;
- un tableau de valeurs ;
- sa courbe représentative $C_f$ : ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;f(x))$.

Exemples. $g(-1)=0$
2 admet pour antécédents 0 et 10 par $g$.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $5$ | $10$ |
|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $0$ | $2$ | $3$ | $2$ |

$\mathrm{A}(5\,;3)$ est un point de la courbe $C_g$.

▸ $f$ est dite croissante (resp. décroissante) sur $\mathcal{D}$ lorsque, pour tous réels $a$ et $b$ de $\mathcal{D}$ tels que $a \leqslant b$, on a : $f(a) \leqslant f(b)$ (resp. $f(a) \geqslant f(b)$).
$f$ est dite monotone sur $\mathcal{D}$ lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur $\mathcal{D}$.

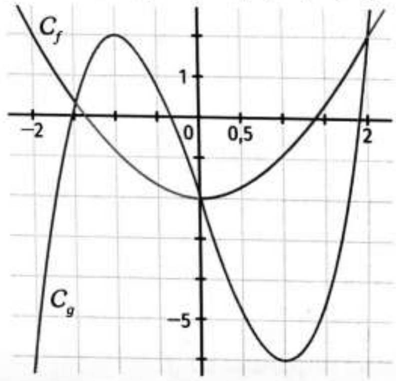
Exemple. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
On a : $-3 \leqslant -1$ donc $f(-3) \geqslant f(-1)$.
La fonction racine carrée est monotone sur $[0\,;+\infty[$.

▸ On dit que $f$ admet un minimum (resp. un maximum) $m$ (resp. $\mathrm{M}$) sur $\mathcal{D}$ en $x=\alpha$ lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geqslant m$ (resp. $f(x) \leqslant \mathrm{M}$) et $f(\alpha)=m$ (resp. $f(\alpha)=\mathrm{M}$).

Exemple. La fonction carré admet $0$ pour minimum sur $\mathbb{R}$, atteint pour $x=0$.
Pour tout réel $x$, $x^2 \geqslant 0$.

▸ Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un ensemble $\mathcal{D}$. $k$ est un réel. Graphiquement, les solutions de :
- $f(x) \geqslant k$ sont les abscisses des points de $C_f$ dont l'ordonnée est supérieure ou égale à $k$ ;
- $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $C_f$ et $C_g$ ;
- $f(x) \geqslant g(x)$ sont les abscisses des points de $C_f$ situés au-dessus ou sur $C_g$.

Exemple. $f(x)<2 \Leftrightarrow x \in\, ]-2\,;2[$
$f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in\, ]-\infty\,;-1{,}5] \cup [0\,;2]$



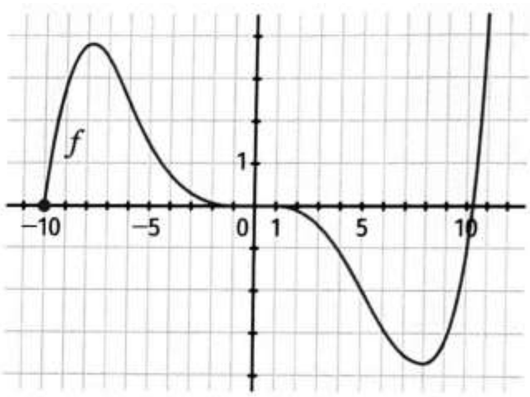

**Exercice 1 :** On considère le tableau de variations d'une fonction $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $4$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | ↗ | $4$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ |

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathfrak{D}$ de $f$
2. Décrire les variations de cette fonction sur $\mathfrak{D}$

**Exercice 2 :** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par leur expression $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x$. A l'aide de la calculatrice, résoudre $f(x)=g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$

**Exercice 3 :** On considère une fonction $f$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous




Décrire les variations de $f$ sur son ensemble de définition et préciser son maximum et son minimum

**Exercice 4 :** En utilisant le graphique précédent, résoudre $f(x)=0$ et $f(x)>0$

# FONCTIONS AFFINES

▸ Une fonction affine $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, où $m$ et $p$ sont des nombres réels.
Soient $a$ et $b$ deux réels distincts et $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de $C_f$.
Alors : $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple. La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 1$ est une fonction affine.
Son coefficient directeur est $m = 5$ et son ordonnée à l'origine est $p = -1$.

▸ Si $m > 0$ (resp. $m < 0$), alors $f$ est une fonction strictement croissante (resp. décroissante) sur $\mathbb{R}$.

Exemple. $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 5x$ est une fonction affine avec $m = -5 < 0$. $f$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

▸ Le tableau de signes de $f$, lorsque $m \neq 0$, est le suivant :

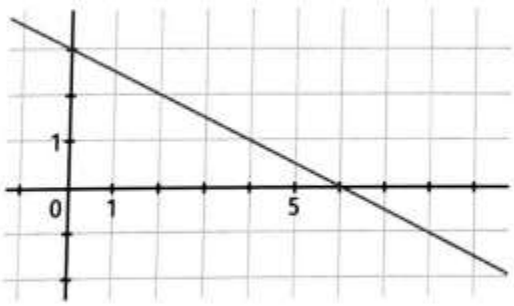
| $x$ | $-\infty$ | | $-\dfrac{p}{m}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $mx+p$ | | Signe de $-m$ | 0 | Signe de $m$ | |

Pour étudier le signe d'un produit ou quotient de deux fonctions affines, on étudiera le signe de chacune des fonctions dans un même tableau de signes et on conclura à l'aide de la propriété des signes d'un produit ou d'un quotient.

Exemple. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x - 2$.
Voici son tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $6x-2$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

**Exercice 1 :** $\boldsymbol{f}$ est la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la représentation graphique ci-dessous




A l'aide du graphique :

1. Déterminer le signe de $f$
2. Déterminer l'expression de $f$

**Exercice 2 :** $\boldsymbol{f}$ est une fonction affine telle que $f(-2) = 4\ \ et\ f(3) = 5$. Déterminer l'expression de $f$

**Exercice 3 :** Dresser le tableau de signes de la fonction affine $f$ définie par $f(x) = 4 - 7x$

**Exercice 4 :** Etudier le signe de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 5)(4 - x)$

# FONCTIONS INVERSE ET CUBE

- La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Sa courbe représentative est une hyperbole.

Voici son tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ |

Exemples. L'inverse de $3$ est $\frac{1}{3}$.

L'inverse de $-\frac{1}{5}$ est $-5$.

On a : $2 \leqslant 6$ donc $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{6}$.

- La fonction cube est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

$f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples. Le cube de $-3$ est $(-3)^3 = -27$

On a : $-1 \leqslant 2$ donc $(-1)^3 \leqslant 2^3$.

$x^3 = 64$ admet comme unique solution $4$ car $4^3 = 64$.

- Les fonctions inverse et cube sont impaires, c'est-à-dire que, pour tout réel $x$ de l'ensemble de définition de $f$, $f(-x) = -f(x)$.

Leur courbe représentative dans un repère orthonormé est une courbe symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemples. $\frac{1}{-7} = -\frac{1}{7}$ ; $(-5)^3 = -(5^3)$

**Exercice 1 :** Comparer les réels $-\frac{1}{5}\ et -\frac{1}{7}$ puis les réels $3^3 et\ \pi^3$

**Exercice 2 :** Résoudre $\frac{1}{x} = -3$ et $x^3 = -125$

**Exercice 3 :** $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(x) = -2x^3 + \frac{2}{x}$. Montrer que $f$ est une fonction impaire

**Exercice 4 :** Résoudre $\frac{1}{x} \geq 5$ et $x^3 < 27$

# FONCTIONS CARRÉ ET RACINE CARRÉE

- La fonction carré est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.
Sa courbe représentative est une parabole.
$f$ est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

**Exemples.** Le carré de $2$ est $2^2=4$.
Le carré de $-3$ est $(-3)^2=9$.
On a : $-4 \leqslant -3$ donc $(-4)^2 \geqslant (-3)^2$.

- La fonction carré est paire : pour tout réel $x$, $f(-x)=f(x)$.
Sa courbe représentative dans un repère orthonormé est une courbe symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

**Exemple.** $(-5)^2=5^2$

- Pour tout réel positif $x$, la racine carrée de $x$ est le nombre positif, noté $\sqrt{x}$, tel que $(\sqrt{x})^2=x$.
La fonction racine carrée est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
$f$ est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

**Exemples.** La racine carrée de $9$ est $3$.
La racine carrée de $-3$ n'existe pas.
On a : $2<7$ donc $\sqrt{2}<\sqrt{7}$.

- Soit $a$ un nombre réel.
On considère l'équation $x^2=a$. Alors :
• si $a<0$, l'équation n'a pas de solution ;
• si $a=0$, l'équation a pour unique solution $x=0$ ;
• si $a>0$, l'équation a deux solutions : $x=-\sqrt{a}$ et $x=\sqrt{a}$.
On considère l'inéquation $x^2 \leqslant a$. Alors :
• si $a<0$, l'inéquation n'a pas de solution ;
• si $a=0$, l'inéquation a pour unique solution $x=0$ ;
• si $a>0$, l'ensemble des solutions est l'intervalle $[-\sqrt{a}\ ;\sqrt{a}]$.

**Exemples.** $x^2=16$ admet deux solutions $-4$ et $4$.
$x^2=-2$ n'admet pas de solution réelle.
$x^2=0$ admet comme unique solution $0$.
$x^2<16 \Leftrightarrow x\in\,]-4\ ;4[$.
$x^2 \leqslant -1$ n'admet pas de solution réelle.
$x^2 \geqslant 3 \Leftrightarrow x \in\, ]-\infty\ ;-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}\ ;+\infty[$.
$x^2 \geqslant -2 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$.

**Exercice 1 :** Comparer

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $et$ $2^2$ 2. $\sqrt{5}$ $et$ $\sqrt{\pi}$

**Exercice 2 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\sqrt{x}=-2$
2. $\sqrt{x}=4$
3. $x^2=7$

**Exercice 3 :** Résoudre dans $\mathbb{R}$

1. $\sqrt{x}>-2$ 2. $x^2\leq 5$
3. $x^2>25$

# REPÉRAGE DANS LE PLAN

- Dans un repère $(O\,;I\,,J)$, on considère les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$. Les coordonnées du milieu $I$ du segment $[AB]$ sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

**Exemple.** On considère les points $A(1\,;-3)$ et $B(-2\,;5)$. Les coordonnées de $I$, milieu de $[AB]$, sont alors $\left(\dfrac{1-2}{2}\,;\dfrac{-3+5}{2}\right)$ soit $(-0{,}5\,;1)$.

- Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre deux points $A$ et $B$ du plan, de coordonnées respectives $(x_A\,;y_A)$ et $(x_B\,;y_B)$, est donnée par : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

**Exemple.** On considère les points $A(1\,;-3)$ et $B(-2\,;5)$. La distance $AB$ est égale à : $\sqrt{(1-(-2))^2+(-3-5)^2}=\sqrt{3^2+(-8)^2}=\sqrt{73}$.

- Trois points distincts du plan $A$, $B$ et $C$ sont alignés dans cet ordre si et seulement si $AC=AB+BC$.

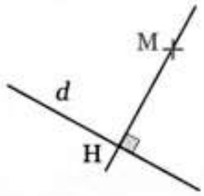
**Exemple.** Les points $A(-2\,;-2)$, $B(3\,;1)$ et $C(8\,;4)$ sont alignés dans cet ordre car :

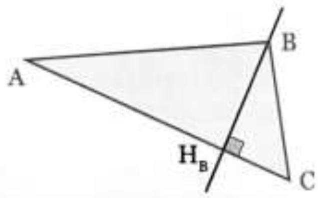
$$AC=\sqrt{(8-(-2))^2+(4-(-2))^2}=\sqrt{100+36}$$
$$=\sqrt{136}=2\sqrt{34}$$
$$AB=\sqrt{(3-(-2))^2+(1-(-2))^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}$$
$$BC=\sqrt{(8-3)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25+9}=\sqrt{34}.$$

Donc $AC=AB+BC$.

- Le projeté orthogonal du point $M$ sur une droite $d$ est le point de la droite $d$ le plus proche du point $M$. Ce point $H$ est tel que $d$ est perpendiculaire à $(MH)$.
On appelle hauteur issue de $B$ d'un triangle $ABC$, la droite passant par $B$ et $H_B$, le projeté orthogonal de $B$ sur $(AC)$.

**Exemple.**




**Exercice 1 :**

1. Placer les points $A(-2;-2)$ et $B(4;0)$ dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$ du plan.
2. Calculer les coordonnées de $I$, milieu de $[AB]$
3. Vérifier par lecture graphique, ce résultat.
4. Vérifier, par le calcul, que les points $A, I$ et $B$ sont alignés dans cet ordre.

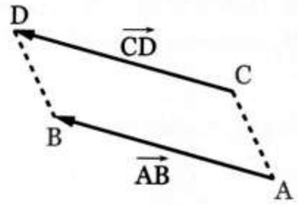
**Exercice 2 :** On considère les points $A(6\,;5), B(2;-3)$ et $C(-4\,;0)$ dans un repère orthonormé $(O\,,I,J)$ du plan.

1. Calculer les nombres $AB^2, BC^2$ et $AC^2$
2. En déduire la nature du triangle $ABC$
3. En déduire le pied de la hauteur issue de $A$ dans $ABC$
4. Calculer le périmètre et l'aire du triangle $ABC$

# VECTEURS DANS LE PLAN

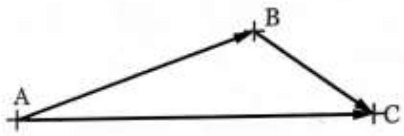
▶ Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par une direction (celle de la droite $(AB)$), un sens (de $A$ vers $B$) et une norme (la longueur $AB$). La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ associe à tout point $C$ du plan l'unique point $D$ tel que $ABDC$ est un parallélogramme.
Le vecteur $-\overrightarrow{AB}$ est le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ : on le note aussi $\overrightarrow{BA}$.

**Exemple.**




▶ Pour tous points $A$, $B$, $C$ et $D$ du plan, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles) et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme.

**Exemple.**




▶ On considère les points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$.
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u+w}$ sont $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

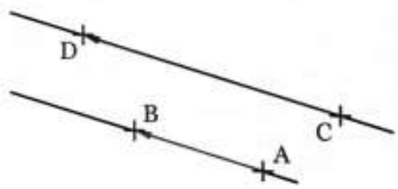
**Exemple.** On considère les points $A(-2\,;0)$ et $B(1\,;4)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 4-0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc celles de $\overrightarrow{AB}+\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} 3-2 \\ 4+2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

▶ Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires lorsqu'il existe un réel $\lambda$ tel que $\vec{u}=\lambda\vec{w}$. Ces vecteurs ont alors la même direction. De plus, ils sont colinéaires si et seulement si leur déterminant $xy'-x'y$ est nul. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

**Exemple.** $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\vec{w}=-3\vec{u}$.
Leur déterminant est bien égal à 0 car $2\times 9-(-3)\times(-6)=18-18=0$.

▶ Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**Exemple.**




▶ Les points $A$, $B$ et $C$, distincts deux à deux, sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

**Exemple.**


**Exercice 1 :**

1. Construire un triangle $ABC$ quelconque.
2. Placer le point $D$ tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$
3. Simplifier l'expression vectorielle $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$
4. Construire un vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}$

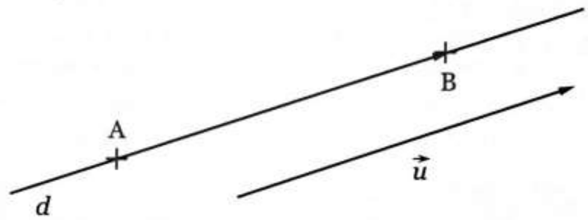
**Exercice 2 :** Soient $A(2\,;6), B(8\,;2), C(3;2), D(6;0)\,et\,E(18;-8)$ cinq points dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que les droites $(AB)et\ (CD)$ sont parallèles
2. Les points $C, D\ et\ E$ sont-ils alignés ? Justifier
3. Calculer les coordonnées du vecteur
$$\vec{u}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BE}$$

# EQUATIONS DE DROITE

▸ Une droite $d$ peut être définie par :
- un de ses vecteurs directeurs $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points distincts de $d$ ;
- une équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels.

Exemple.

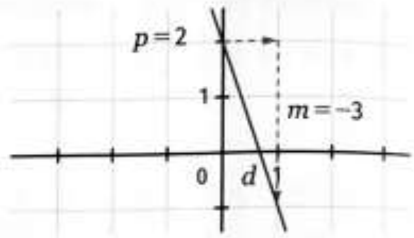



▸ Le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Exemple. La droite d'équation $3x - y + 2 = 0$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

▸ Toute droite $d$ non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où $m$ est le coefficient directeur et $p$ l'ordonnée à l'origine.
Le coefficient directeur d'une droite $(AB)$ non parallèle à l'axe des ordonnées, avec $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$, est $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple.




▸ Deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont sécantes si et seulement si $ab' - a'b \neq 0$.
Sinon elles sont strictement parallèles ou confondues.

Exemple. Les droites d'équations respectives $3x - y = 0$ et $-8x + 3y + 5 = 0$ sont sécantes car $3 \times 3 - (-1) \times (-8) = 1 \neq 0$.

▸ Si deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont sécantes, alors leur point d'intersection a pour coordonnées le couple solution du système formé par les deux équations.

Exemple. Le point d'intersection des droites de l'exemple précédent a pour coordonnées le couple solution du système $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ -8x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$ soit $(-5 ; -15)$.

**<u>Application</u> :**

On considère les points $A(4; 3), B(-2\,; 0), C(0\,; 2)$ $et$ $D(1\,;\,-2)$

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(AB)$ et l'équation réduite de la droite $(CD)$
2. Montrer que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont sécantes
3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

# PROBABILITÉS

| | |
|---|---|
| L'univers d'une expérience aléatoire est l'ensemble des issues possibles. On associe à celles-ci des probabilités dont la somme vaut $1$. Toute probabilité est un nombre compris dans l'intervalle $[0\,;1]$. On parle d'équiprobabilité quand toutes les probabilités des issues sont égales. | **Exemple.** On lance un dé cubique et on lit le numéro de la face supérieure. L'univers est donc $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$. Les probabilités de ces six issues sont toutes égales à $\frac{1}{6}$. |
| Un événement est un ensemble d'issues. Sa probabilité est la somme des probabilités des issues le composant. L'événement impossible a pour probabilité $0$. L'événement certain a pour probabilité $1$. | **Exemple.** Dans l'expérience ci-dessus, la probabilité de l'événement « obtenir un nombre pair » vaut $3\times\frac{1}{6}=0{,}5$. « Obtenir un nombre supérieur à 7 » est un événement impossible. « Obtenir un nombre inférieur à 7 » est un événement certain. |
| L'événement complémentaire $\overline{A}$ est l'ensemble des issues que ne réalise pas l'événement $A$. Sa probabilité est $P(\overline{A})=1-P(A)$. | **Exemple.** L'événement complémentaire de « obtenir un nombre pair » est l'événement « obtenir un nombre impair ». Sa probabilité est $1-0{,}5=0{,}5$. |
| $A\cap B$ est l'ensemble des issues qui réalisent les événements $A$ et $B$ à la fois. On l'appelle intersection de $A$ et $B$. Si $P(A\cap B)=0$, on dit que les événements $A$ et $B$ sont incompatibles. Dans ce cas, $A\cap B=\emptyset$. $A\cup B$ est l'ensemble des issues qui réalisent $A$ ou $B$ (au moins l'un des deux). On l'appelle union de $A$ et $B$. On a la formule $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. | **Exemple.** Dans une classe de $34$ élèves, $16$ sont en option sport, $12$ en option latin dont $4$ qui sont inscrits aux deux. La probabilité de choisir au hasard un élève inscrit en option latin (événement $L$) ou en option sport ($S$) est : $P(L\cup S)=P(L)+P(S)-P(L\cap S)$ $=\frac{12}{34}+\frac{16}{34}-\frac{4}{34}=\frac{24}{34}$. |

**Exercice 1 :** On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et on s'intéresse à sa valeur.

1. Donner l'univers associé à cette expérience aléatoire.
2. Est-ce une situation d'équiprobabilité ?
3. Quelle est la probabilité de tirer un as ?
4. Quelle est la probabilité de tirer une figure ?

**Exercice 2 :** On fait tourner une roue partagée en cinq secteurs de même section angulaire. Trois d'entre eux sont blancs numérotés de 1 à 3. Les deux autres sont rouges numérotés de 1 à 2. On s'intéresse à leur couleur et au numéro sur lequel on tombe lorsqu'on fait tourner cette roue.

1. Donner un exemple d'événement impossible
2. Donner un exemple d'événement certain
3. Donner un exemple d'événements incompatibles

**Exercice 3 :** Sur une classe de terminale de 32 élèves, quatre d'entre eux n'ont pas obtenu le bac. Six élèves ont reçu un avis défavorable du conseil de classe et, parmi eux, deux n'ont pas obtenu le bac. On tire au sort un élève de cette classe. Calculer la probabilité :

1. Qu'il ait échoué au bac ou reçu un avis défavorable
2. Qu'il ait obtenu le bac sans avoir reçu d'avis défavorable

**Exercice 4 :** On choisit au hasard un nombre entier entre $1\ et\ 100$. On considère les événements suivants :

$A$: "le nombre choisi est le carré d'un entier"

$B$: "$le\ nombre\ choisi\ est\ le\ cube\ d'un\ entier$"

1. Les événements $A\ et\ B$ sont-ils incompatibles ?
2. Calculer $P(A), P(B), P(A \cap B),$ et enfin, $P(A \cup B)$